1181. n 次元共形幾何學ノ公理ニ就テ

岩本 秀行（東大）

共形幾何学ノ基礎ニ関スル考察ハスデニ二三ノ人ニヨッテナサレテキマスガ、コヽデハ一般ニ reel, pythagoreich ナ Körper ニ於ケル n 次元共形幾何學ノ基礎ヲ系統ダテヽノベマス。

§1. $\mathcal{L}$ ヲ束トシ $\mathcal{L}$ ノ元ヲ $A, B, C, \cdots$ デ, join ヲ $A+B$, meet ヲ $A.B$. 半順序ヲ $\leqq$ デ表ハシマス。次ノ I－VI ヲ満足スル $\mathcal{L}$ ヲ共形幾何トイヒマス。

I. 1. 任意ノ $A \in \mathcal{L}$ ニ対シ $A+O=A$, $A \cdot I = A$ ナル O, I ガ存在スル。

2. $A \leqq B \leqq C$ ナラバ $B \cdot B' = A$, $B+B' = C$ ナル B' ガ存在スル。

3. $A \cdot B \cdot C > O$, $A \leqq C$ ナルスベテ A, B, C ニ對シ modular identity: $(A+B)C = A+B \cdot C$ ガ成立スル。

定義 $O \leqq A \leqq P$ ナラ必ズ $A=O$ 又ハ $A=P$ ナル如キ P ヲ点トヨビマス。

4. P, Q ガ任意ノ点デ $O \leqq R \leqq P+Q$ ナラ $R=O$ 又ハ $R=P$. 又バ $R=Q$ デアル。

5. P ガ点デ $A \leqq B \leqq A+P$ ナラバ $B=A$ 又ハ $B=A+P$.

上ノ I.(1－5) ヨリ $\mathcal{L}$ ニ次ノ性質ヲモツ次元函数ガ入

ルコトガ分リマス　即チ任意ノ $A\in\mathfrak{L}$ ニ $-1\leqq d(A)\leqq+\infty$ ナル整数 $d(A)$ ガ対應シテ

1. $d(0)=-1,\quad d(P)=0$
2. $d(A)<+\infty$ ナラバ $d(A)=1+\max\limits_{A'<A} d(A')$
3. $d(A),\ d(B)<+\infty$ ナラバ

$$d(A)+d(B)\geqq d(A+B)+d(A.B)$$

II. $A_1\geqq A_2\geqq\cdots,\ (A_1\leqq A_2\leqq\cdots\quad)$

ナル列 $A_1, A_2, \cdots$ ガアレバ，或ル自然数 k ガ存在シテ $A_k=A_{k+1}=\cdots$ トナル。

之カラ次ノコトガ分リマス。

任意ノ $A\neq I$ ニ対シ有限コノ獨立ナ点 $P_1,\cdots,P_n$ ガアッテ

$$A=P_1+P_2+\cdots+P_n$$

定義　二ツノ元 A, A' ト点 P ガアッテ，次ノ 1), 2) ガ成立ツトキ A, A' ハ P デ切スルトイヒマス。

1). $A\cdot A'=P\qquad d(A),\ d(A)>0$

2). $d(A+A')\leqq 1+\quad\max(d(A),\ d(A'))$

III. P, Q, R, S ヲ獨立ナ四点トスレバ

$$R\leqq L\leqq P+Q+R+S\quad 且\ (P+Q+R)\cdot L=R$$

ナル L ガ唯一ツ存在スル、之カラ次ノコトガ證明サレマス。

定理 1. A, B, C ガ三ツノ元デ $0<d(A)\leqq d(B)\leqq d(C)$ デ A ガ P ニ於テ B ニ切シ、B ガ P ニ於テ C ニ切スルナラバ A ハ P ニ於テ C ニ切スル。

定理 2. $d(A)\geqq 1,\quad A\geqq P,\quad P'\neq A$ ナラバ $d(A)=d$

(A') デ P ニ於テ A ニ切スル様ナ A' ガ唯一ツ存在スル。

定理3.　A, B ガ P ニ於テ切スルトスル、Q ヲ $Q \neq A, B$ ナル点トスル。A', B' ガ $A', B' > Q$ デ P ニ於テ A, B ニ切スル元トスレバ $A+B$, AB ハ P ニ於テ夫々 $A'+B'$, $A'B'$ ニ切スル。

§2. W ヲ $\mathcal{L}$ カラトツタ或ル一定ノ点トシマス。$A > W$ ナル任意ノ A ニ対シ、次ノ如ク A_∞ ヲ定義シマス。

定義　A_∞ ハ A ニ於テ W ニ切シ、且ツ $d(A) = d(A')$ ナル A' 全体デアル。

定義　二ツノ A_∞, B_∞ ガアルトスル, A_∞, B_∞ カラ夫々任意ノ元、A, B ヲトリ、$\mathcal{L}$ ノ点 $P (\neq W)$ ヲ任意ニトル。$A', B' \geqq P$ デ且ツ A', B' ガ夫々 W ニ於テ A, B ニ切スル様ニ A', B' ヲトリ $A_\infty \smile B_\infty = (A'+B')_\infty$, $A_\infty \frown B_\infty = (A'B')_\infty$ ト定義スル、コノ定義ハ A, B, P, ノトリ方ニ関係セズ, A_∞, B_∞ ノミニヨリ定マル

定義　$\mathcal{L}_W$ ヲ次ノ如キモノノ全体ノ集合トスル：$\mathcal{L}$ ニ於テ；W ト異ル点，$A > W$ ナル任意ノ A ト A_∞ トヲ組合セタモノ (A, A_∞)，及ビ任意ノ $A > W$ カラ定マル A_∞，$\mathcal{L}_W$ ノ元ヲ $a, b, c, \cdots$ デ表ハス。

定理4.　$\mathcal{L}_W$ ハソノ元ノ間ノ次ノ如キ結合ノ規則デ有限次元ノ complimented modular lattice ヲツクル。

1) $a=P$, $b=Q$, P, Qガ $\neq W$ ナル点ナルトキハ

$a \smile b = P+Q$, $a \frown b = P \cdot Q$

2) $a = A_\infty$, $b = B_\infty$ ナラバ $a \smile b = A_\infty \smile B_\infty$, $a \frown b = A_\infty \frown B_\infty$.

3) $a = (A, A_\infty)$, $b = P$ ナルトキ、$P<B$ ガ W ニ於テ A ニ切スルト ($d(B)=2$) コノ様ナ B ハ必ズアル、然ルトキ $A+B=C$ トスレバ

$$a \smile b = (C, C_\infty)$$

又 $P < A \longrightarrow a \frown b = a$

$P \not< A \longrightarrow a \frown b = a$

4) $a=(A, A_\infty)$ $b=(B, B_\infty)$ ノトキ

$a \smile b = (A+B, A_\infty \smile B_\infty)$, $a \frown b = (A \cdot B, A_\infty \frown B_\infty)$

又 $\mathcal{L}$ ハ次ノ條件ヲ滿足スルトスル。

IV. P, Q, R ヲ獨立ノ三点トスレバ $S<P+Q+R$, $S \neq P, Q, R$ ナル S ガ少クトモ一ツ存在スル。

V. P, Q, R, S ガ獨立ナ任意ノ四点デ $W<P+Q+R+S$, $A<W+P+Q$, $B<W+R+S$ ナラバ $W+P+R$, $W+Q+S$ ハ W デ切スル。

(V ハソノ幾ツカノ点ガ一致スル場合モ或ル modification デ成立ツコトガ分リマス)

$\mathcal{L}$ ノ二次元ノ元ヲ円トイフコトニシマス。A ヲ $W<A$ ナル任意ノ円トスルトキ (A, A_∞) ヲ $\mathcal{L}_W$ ノ直線トイフコトニシマス。A ガ $\mathcal{L}$, k 次元ノ元デ $A>W$ ノトキ A_∞ 及ビ (A, A_∞) ヲ $\mathcal{L}_W$, k-element トイフコト

ニシマス。然ラバ上ノ I, II, III, IV カラ $\mathcal{L}_W$ ハ Veblen-young ノ意味ノ射影幾何ナルコトが分リマス。

定義　A, B ヲ W ニ於テ切スル二ツノ元トスルトキ $a=(A, A_\infty)$, $b=(B, B_\infty)$ ハ互ニ平行デアルトイフ。

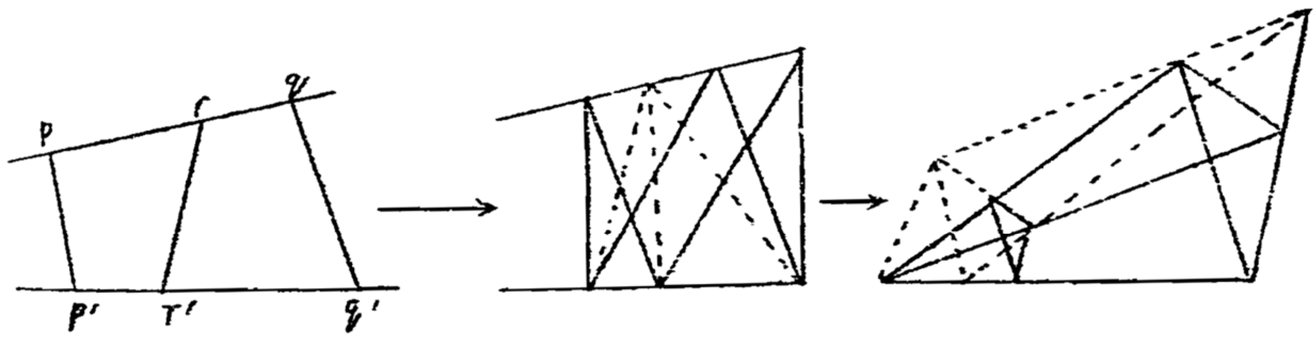
定理 5. a, b ヲ同一ノ平面（$\mathcal{L}_W$ ノ二次元ノ元）上ノ二直線トシ p, q, r ヲ a ノ上ノ p', q', r' ヲ b ノ上ノ三点トスル。p, p', r, r' ; r, r', q, q' が夫々同一円周上ニアレバ $p \smile p'$, $q \smile q'$ ハ互ニ平行デアル。(Fig 1)

之ハ V カラ直ニ出ル。

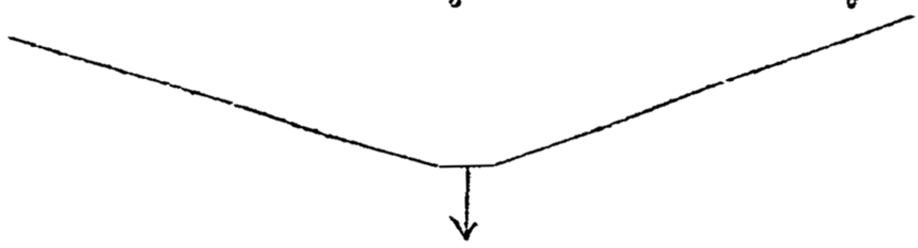
定理6,（Pascal ノ定理）　（Fig 2）

定理7,（Desargues ノ定理）（Fig 3）

定理8,（円ニ内接スル六角形ニ関スル Pascal ノ定理



(Fig 1)　(Fig 2)　(Fig 3)



定　理　8